Dualità di Poincaré

M varietà senza bordo e orientata

$$H^k(M) \times H_c^{n-k}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\omega, \eta) \longmapsto \int_M \omega \wedge \eta = \langle \omega, \eta \rangle$$

$$PD: H^k(M) \longrightarrow H_c^{n-k}(M)^*$$
$$\omega \longmapsto \left(\eta \longmapsto \langle \omega, \eta \rangle \right)$$

<u>Teo</u>: PD è isomorfismo

<u>Lemma di 5</u>:

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & V_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & V_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & V_4 \arrow[r] \arrow[d, "f_4"] & V_5 \arrow[d, "f_5"] \\
W_1 \arrow[r] & W_2 \arrow[r] & W_3 \arrow[r] & W_4 \arrow[r] & W_5
\end{tikzcd}$$

sp. vett.

Supponiamo che il diagramma sia commutativo a meno di segno

f_1, f_2, f_4, f_5 isom. $\Rightarrow$ f_3 isom.

INDUZIONE SUGLI APERTI DI M

Lemma: $\mathcal{A} = \{$aperti di $M\}$ alcuni

a) $\mathcal{A}$ contiene tutti gli aperti diffeomorfi a $\mathbb{R}^n$

b) $U, V, U \cap V \in \mathcal{A} \Rightarrow U \cup V \in \mathcal{A}$

c) Se $U_i \in \mathcal{A}$ e sono disgiunti $i \in I$ anche infiniti $\Rightarrow \bigsqcup_i U_i \in \mathcal{A}$

Tesi: $M \in \mathcal{A}$

dim (Teo PD). $\mathcal{B} = \{$aperti di M per cui la tesi è vera$\}$

$n = \dim M$ $= \{ U \subseteq M \mid PD : H^k(U) \to H_c^{n-k}(U)^* \text{ isomorfismo} \}$

$0 \leq k \leq n$ fissato

Mostro che $M \in \mathcal{B}$ verificando che $\mathcal{B}$ soddisfa a), b), c).

a) $\mathcal{B}$ contiene tutti gli aperti diffeomorfi a $\mathbb{R}^n$

$U \cong \mathbb{R}^n$ $\quad PD: H^k(U) \to H_c^{n-k}(U)^*$

cioè $PD: H^k(\mathbb{R}^n) \to H_c^{n-k}(\mathbb{R}^n)^*$ è isom.

Se $k>0$ entrambi banali $\Rightarrow$ ok

Se $k=0$ $\quad PD: \underset{\mathbb{R}}{\underset{\parallel}{H^0(\mathbb{R}^n)}} \to \underset{\mathbb{R}^* = \mathbb{R}}{\underset{\parallel}{H_c^n(\mathbb{R}^n)^*}}$

non è banale $\Rightarrow$ isomorfismo

$$H^0(\mathbb{R}^n) \to H_c^n(\mathbb{R}^n)^*$$
$$\mathbb{R} \ni \lambda \longmapsto \left(\omega \longmapsto \int_{\mathbb{R}^n} \lambda\omega\right)$$ non è banale

b) $U, V \in \mathcal{B} \Rightarrow U \cup V \in \mathcal{B}$

$U \cap V$

$$\begin{tikzcd}
H^{k-1}(U) \oplus H^{k-1}(V) \arrow[r] \arrow[d, "PD"] & H^{k-1}(U \cap V) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "PD"] & H^k(U \cup V) \arrow[r] \arrow[d, "PD"] & H^k(U) \oplus H^k(V) \arrow[r] \arrow[d, "PD"] & H^k(U \cap V) \arrow[d, "PD"] \\
H_c^{n-k+1}(U)^* \oplus H_c^{n-k+1}(V)^* \arrow[r] & H_c^{n-k+1}(U \cap V)^* \arrow[r, "\delta"] & H_c^{n-k}(U \cup V)^* \arrow[r] & H_c^{n-k}(U)^* \oplus H_c^{n-k}(V)^* \arrow[r] & H_c^{n-k}(U \cap V)^*
\end{tikzcd}$$

Fatto: è commutativo a meno di segno

Lemma dei 5 $\Rightarrow$ $PD : H^k(U \cup V) \to H_c^{n-k}(U \cup V)^*$ isom.

c) $U_i \in \mathcal{B} \Rightarrow \bigsqcup_i U_i \in \mathcal{B}$

disgiunti

$$H^k(\sqcup_i U_i) = \prod_i H^k(U_i) \qquad H_c^k(\sqcup_i U_i) = \bigoplus_i H_c^k(U_i)$$

<u>Ex</u>: $\left(\bigoplus_i V_i\right)^* = \prod_i V_i^*$

Quindi $$H_c^k\left(\bigsqcup_i U_i\right)^* = \left(\bigoplus_i H_c^k(U_i)\right)^* = \prod_i H_c^k(U_i)^*$$

$$\parallel$$

$$\cancel{H^*\left(\bigsqcup_i U_i\right)^*}$$

Noi sappiamo che $U_i \in \mathcal{B}$

PD: $H^k(U_i) \xrightarrow{\sim} H_c^{n-k}(U_i)^*$

PD:
$$\begin{tikzcd}
H^k\left(\bigsqcup_i U_i\right) \arrow[r, "?"] \arrow[d, equal] & H_c^{n-k}\left(\bigsqcup_i U_i\right)^* \arrow[d, equal] \\
\prod_i H^k U_i \arrow[r, dashed, "PD"] & \prod_i H_c^{n-k}(U_i)^*
\end{tikzcd}$$

è un isomorfismo a ciascun fattore

<u>Teo</u>: PD: $H^k(M) \xrightarrow{\sim} H_c^{n-k}(M)^*$ mappa CANONICA

<u>Cor</u>: M cpt orientata $\Rightarrow$ $b^k(M)$ finito $\forall k$.

dim: M cpt $\Rightarrow H^k(M) = H^k_c(M)$

$$\begin{tikzcd} H^k(M) \arrow[r, "\sim", "PD"'] \arrow[rr, bend right, "id"'] & H^{n-k}(M)^* \arrow[r, "\sim", "PD"'] & (H^k(M)^*)^* \end{tikzcd}$$

$id : V \to V^{**}$ è isom. $\Leftrightarrow$ $\dim V < +\infty$

Qui $id = PD \circ PD$ isom $\Rightarrow \dim H^k(M) < +\infty$

$\square$

Es: $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{Z} \times \{0\}) = M \qquad b^1(M) = +\infty$

Cor M cpt $\Rightarrow b^k(M) = b^{n-k}(M)$

Cor: M ha dim. dispari $\Rightarrow \chi(M) = 0$

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k b^k(M) = 0$$